RCS iteration の一つの定義(数学基礎論とその応用)

古田, 泰之

数理解析研究所講究録
772巻 1991年 84-94

RCS-iterationの一つの定義

神戸大・自然科学研究科 古田泰之
(Yasuyaki Koda)

定義其壱. $\varepsilon \in On$ とする. $\langle P_\alpha \mid \alpha \leq \varepsilon \rangle$, $\langle \dot{Q}_\alpha \mid \alpha < \varepsilon \rangle$ が, RCS-iterationであるとは, 次の条件(i)-(iii)をみたすことである.

(i) $\forall \alpha < \varepsilon$ ($\dot{Q}_\alpha$ は P_α-name for a p.c. $\wedge$ $\dot{Q}_\alpha$ は full)

(ii) $\alpha \leq \varepsilon$ に対し,

$P_\alpha = \{ p \subseteq Cond^\alpha \mid \phi \in p \wedge p$ は可算

$\wedge \forall_{\beta < \alpha} [p \restriction \beta \in P_\beta \wedge p \restriction \beta \Vdash_\beta$ "$\exists_{q \in \dot{Q}_\beta}$ (q は $p \restriction \{\beta\}$ の下界)"$] \}$

ただし, $p \restriction \beta \doteq \{ \tau \restriction \beta \mid \tau \in p \}$, $p \restriction \{\beta\} \doteq \{ \langle \tau \restriction \{\beta\}, \{\phi\} \rangle \mid \tau \in p \}$ と定める. また, $Cond^\alpha$, $\tau \restriction \beta$, $\tau \restriction \{\beta\}$ は後で定義する.

(iii) $\alpha \leq \varepsilon$, $p_1, p_2 \in P_\alpha$ に対し,

$p_1 \leq p_2$ in P_α iff $\forall_{\beta < \alpha} (p_1 \restriction \beta \leq p_2 \restriction \beta$ in $P_\beta)$

$\wedge \forall_{\beta < \alpha} [p_1 \restriction \beta \Vdash_\beta$ "$\forall_{q \in \dot{Q}_\beta}$ (q は $p_1 \restriction \{\beta\}$ の下界

$\rightarrow q$ は $p_2 \restriction \{\beta\}$ の下界)"$]$

$\alpha \leq \varepsilon$ についての帰納法により, $\leq$ が擬順序であることがすぐわかる.

定義其弐. $\alpha \leq \varepsilon$ に対し, $P_{<\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} P_\beta$ とし, $\kappa_\alpha = |P_{<\alpha}|$ とする. $\gamma < \kappa_\alpha^+$ についての帰納法で, $Cond^\alpha(\gamma)$, $Cond^\alpha_\eta(\gamma)$ $(0 < \eta < \alpha)$ を定める.

(a) $\gamma=0$ のとき.

$$\mathrm{Cond}^{\alpha}(0)=\{\phi\}\cup\{\langle 0,\langle \zeta,\dot{\xi}\rangle\rangle \mid \zeta<\alpha \wedge \dot{\xi}\in \mathrm{dom}(\dot{Q}_\zeta)\}$$

$$\mathrm{Cond}^{\alpha}_{\eta}(0)=\{\langle 0,\langle \zeta,\dot{\xi}\rangle\rangle \mid \eta\le\zeta<\alpha \wedge \dot{\xi}\in \mathrm{dom}(\dot{Q}_\zeta)\} \qquad (0<\eta<\alpha)$$

とする. $\mathrm{Cond}^{\alpha}_{\eta}(0)=\{\langle 0,\langle \zeta,\dot{\xi}\rangle\rangle\in \mathrm{Cond}^{\alpha}(0)\mid \eta\le\zeta\}$ である.

(b) $\gamma>0$ のとき.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cond}^{\alpha}(\gamma)=\{\langle \zeta,f\rangle \mid 0<\zeta<\alpha \wedge f \text{ は関数} \wedge \mathrm{dom}(f)\subseteq P_\zeta \\ \wedge\ \mathrm{dom}(f) \text{ は } P_\zeta \text{ の antichain } (=\phi \text{ でも良い}) \\ \wedge\ \forall p\in\mathrm{dom}(f)\,\exists\gamma'<\gamma\,(f(p)\in \mathrm{Cond}^{\alpha}_{\zeta}(\gamma'))\}\end{aligned}$$

$$\mathrm{Cond}^{\alpha}_{\eta}(\gamma)=\{\langle \zeta,f\rangle\in \mathrm{Cond}^{\alpha}(\gamma)\mid \eta\le\zeta\} \qquad (0<\eta<\alpha)$$

とする.

このようにして. $\mathrm{Cond}^{\alpha}(\gamma)$, $\mathrm{Cond}^{\alpha}_{\eta}(\gamma)$ $(0<\eta<\alpha)$. $\gamma<\kappa_\alpha^+$ が定まった. そこで.

$$\mathrm{Cond}^{\alpha}=\bigcup_{\gamma<\kappa_\alpha^+}\mathrm{Cond}^{\alpha}(\gamma)$$

$$\mathrm{Cond}^{\alpha}_{\eta}=\bigcup_{\gamma<\kappa_\alpha^+}\mathrm{Cond}^{\alpha}_{\eta}(\gamma) \qquad (0<\eta<\alpha)$$

とする. さらに. $\tau\in\mathrm{Cond}^{\alpha}$ に対して.

$$\mathrm{depth}(\tau)=\text{the least } \gamma<\kappa_\alpha^+ \text{ s.t. } \tau\in\mathrm{Cond}^{\alpha}(\gamma)$$

と定める.

補題. $\beta<\alpha\le\varepsilon$ とする. 明らかに $\kappa_\beta\le\kappa_\alpha$ であるが. $\gamma<\kappa_\beta^+$ に対し.

$$\mathrm{Cond}^{\beta}(\gamma)\subseteq\mathrm{Cond}^{\alpha}(\gamma)\wedge\forall\eta<\beta(\eta\neq 0\rightarrow \mathrm{Cond}^{\beta}_{\eta}(\gamma)\subseteq\mathrm{Cond}^{\alpha}_{\eta}(\gamma))$$

従って. $\mathrm{Cond}^{\beta}\subseteq\mathrm{Cond}^{\alpha}\wedge\forall\eta<\beta(\eta\neq 0\rightarrow \mathrm{Cond}^{\beta}_{\eta}\subseteq\mathrm{Cond}^{\alpha}_{\eta})$ である.

定義其参．$\alpha \leq \xi$，$\tau \in Cond^\alpha$，$\gamma = \mathrm{depth}(\tau)$ とする．

(1) $\eta \leq \xi$ に対して，$\tau \restriction \eta$ を定める．まず，$\gamma = 0$ のときは，

$$\phi \restriction \eta = \phi$$

$$\langle 0, \langle \zeta, \mathring{g} \rangle\rangle \restriction \eta = \begin{cases} \phi & \text{if } \eta \leq \zeta \\ \langle 0, \langle \zeta, \mathring{g} \rangle\rangle & \text{if } \zeta < \eta \leq \xi \end{cases}$$

とし，$\gamma > 0$ のときは，

$$\langle \zeta, f \rangle \restriction \eta = \begin{cases} \phi & \text{if } \eta \leq \zeta \\ \langle \zeta, g \rangle & \text{if } \zeta < \eta \leq \xi \end{cases}$$

とする．ここで g は，$\mathrm{dom}(g) = \{p \in \mathrm{dom}(f) \mid f(p) \restriction \eta \neq \phi\}$ なる関数で，$p \in \mathrm{dom}(g)$ に対しては，$g(p) = f(p) \restriction \eta$ である．

(2) $\eta < \xi$ に対して，$\tau \restriction \{\eta\}$ を定める．まず，$\gamma = 0$ のときは，

$$\phi \restriction \{\eta\} = \mathring{1}_\eta$$

$$\langle 0, \langle \zeta, \mathring{g} \rangle\rangle \restriction \{\eta\} = \begin{cases} \mathring{g} & \text{if } \eta = \zeta \\ \mathring{1}_\eta & \text{if } \eta \neq \zeta \end{cases}$$

とする．$\gamma > 0$ のときは，まず，$\tau = \langle \zeta, f \rangle$ とし，$\eta < \zeta$ に対しては，

$$\langle \zeta, f \rangle \restriction \{\eta\} = \mathring{1}_\eta$$

とする．$\zeta \leq \eta < \xi$ のときは，

$$\begin{aligned} \langle \zeta, f \rangle \restriction \{\eta\} = \textstyle\bigcup_{p \in X} & \{\langle \sigma, r \rangle \in \mathrm{dom}(f(p) \restriction \{\eta\}) \times P_\eta \mid r \leq p \wedge r \Vdash_\eta \text{“} \sigma \in f(p) \restriction \{\eta\} \text{”}\} \\ & \cup \{\langle \sigma, r \rangle \in \mathrm{dom}(\mathring{1}_\eta) \times P_\eta \mid \forall p \in X (r \perp p) \wedge r \Vdash_\eta \text{“} \sigma \in \mathring{1}_\eta \text{”}\} \end{aligned}$$

と定める．ここで，$X = \mathrm{dom}(f) \cap P_\eta$ である．

$\tau\restriction\eta$ や $\tau\restriction\{\eta\}$ の性質を列挙する. 証明はしない。

補題. $\alpha \leq \eta \leq \varepsilon \wedge \tau \in \mathit{Cond}^{\alpha} \longrightarrow \tau\restriction\eta = \tau$

補題. $\eta \leq \beta < \alpha \leq \varepsilon \wedge \beta \neq 0 \wedge \tau \in \mathit{Cond}^{\alpha}_{\beta} \rightarrow \tau\restriction\eta = \phi$

補題. $0 < \beta < \alpha \leq \varepsilon$ とするとき. $\gamma < \kappa^{+}_{\alpha}$ に対し.

$$\forall_{\eta<\alpha} \forall_{\tau} [\eta \neq 0 \wedge \tau \in \mathit{Cond}^{\alpha}_{\eta}(\gamma) \rightarrow \tau\restriction\beta = \phi \vee \exists_{\delta<\kappa^{+}_{\beta}} (\delta \leq \gamma \wedge \tau\restriction\beta \in \mathit{Cond}^{\beta}_{\eta}(\delta))]$$

補題 $\beta < \alpha \leq \varepsilon$ のとき、$\tau \in \mathit{Cond}^{\alpha}$ に対し

$$\tau\restriction\beta \in \mathit{Cond}^{\beta} \wedge \mathrm{depth}(\tau\restriction\beta) \leq \mathrm{depth}(\tau)$$

補題. $\alpha \leq \varepsilon \wedge \tau \in \mathit{Cond}^{\alpha} \wedge \eta \leq \xi \leq \varepsilon \rightarrow \tau\restriction\eta = (\tau\restriction\xi)\restriction\eta$

補題. $\alpha \leq \varepsilon \wedge \eta < \varepsilon \wedge \tau \in \mathit{Cond}^{\alpha} \longrightarrow \tau\restriction\{\eta\}$ は P_{η}-name

補題 $\eta < \beta \leq \alpha \leq \varepsilon \wedge \tau \in \mathit{Cond}^{\alpha} \wedge \tau\restriction\beta = \phi \longrightarrow \tau\restriction\{\eta\} = \mathring{1}_{\eta}$

補題. $\alpha \leq \eta < \varepsilon \wedge \tau \in \mathit{Cond}^{\alpha} \longrightarrow \forall s \in P_{\eta} (s \Vdash_{\eta}$ "$\tau\restriction\{\eta\} = \mathring{1}_{\eta}$")

P_α $(\alpha \le \varepsilon)$ の性質を列挙する。証明はしない。

補題 $\alpha \le \varepsilon$ とすると、$\{\phi\}$ は P_α の最大元である。また、$P_0 = \{\{\phi\}\}$.

補題 $\beta \le \alpha \le \varepsilon \rightarrow P_\beta \subseteq P_\alpha$

補題 $\beta \le \alpha \le \varepsilon$, $p_1, p_2 \in P_\beta$ とする。

(1) $p_1 \le p_2$ in P_β iff $p_1 \le p_2$ in P_α

(2) $p_1 \perp p_2$ in P_β iff $p_1 \perp p_2$ in P_α

補題 $\alpha \le \varepsilon$ $p_1, p_2 \in P_\alpha$. $p_1 \le p_2$ とすると、

$p_1 \cup p_2 \in P_\alpha \wedge p_1 \cup p_2 \le p_1 \le p_1 \cup p_2$

補題 $\beta \le \alpha \le \varepsilon$. $p_1 \in P_\beta$. $p_2 \in P_\alpha$. $p_1 \le p \restriction \beta$ in P_β とする。このとき、

$p_1 \cup p_2 \in P_\alpha \wedge p_1 \cup p_2 \le p_1, p_2$ in P_α

補題 $\beta \le \alpha \le \varepsilon$ とする。$p_1 \in P_\beta$, $p_2 \in P_\alpha$ に対し、

$p_1 \perp p_2 \restriction \beta$ in P_β iff $p_1 \perp p_2$ in P_α

補題 $\beta \le \alpha \le \varepsilon \rightarrow P_\beta \lessdot P_\alpha$, i.e., $id : P_\beta \rightarrow P_\alpha$ が complete embedding

以上のことから、$\tau\restriction\{\eta\}$について、次のことがわかる。

補題　$\alpha\le\varepsilon$, $\tau\in Cond^{\alpha}$, $depth(\tau)>0$, $\tau=\langle\zeta,f\rangle$　$0<\zeta\le\eta<\varepsilon$, $\zeta<\alpha$ とすると、

(1)　$\tau\restriction\{\eta\}=\bigcup_{p\in dom(f)}\{\langle\sigma,r\rangle\in dom(f(p)\restriction\{\eta\})\times P_\eta \mid r\le p\wedge r\Vdash_\eta \text{“}\sigma\in f(p)\restriction\{\eta\}\text{”}\}$

$\cup\{\langle\sigma,r\rangle\in dom(\dot{1}_\eta)\times P_\eta \mid \forall p\in dom(f)(r\perp p)\wedge r\Vdash_\eta \text{“}\sigma\in\dot{1}_\eta\text{”}\}$

(2)　$p\in dom(f)\ \rightarrow\ p\Vdash_\eta \text{“}\tau\restriction\{\eta\}=f(p)\restriction\{\eta\}\text{”}$

(3)　$r\in P_\eta\wedge\forall p\in dom(f)(r\perp p)\ \rightarrow\ r\Vdash_\eta \text{“}\tau\restriction\{\eta\}=\dot{1}_\eta\text{”}$

補題　$\alpha\le\varepsilon\wedge\tau\in Cond^{\alpha}\rightarrow\forall\eta<\varepsilon(1\Vdash_\eta \text{“}\tau\restriction\{\eta\}\in\dot{Q}_\eta\text{”})$. ここで、$1=\{\phi\}$.

補題　$\eta<\beta\le\alpha\le\varepsilon\wedge\tau\in Cond^{\alpha}\rightarrow 1\Vdash_\eta \text{“}\tau\restriction\{\eta\}=(\tau\restriction\beta)\restriction\{\eta\}\text{”}$

P_α $(\alpha\le\varepsilon)$ に対しては、さらに、次のこともいえる。

補題　$\alpha\le\varepsilon\wedge\tau\in Cond^{\alpha}\rightarrow\{\phi,\tau\}\in P_\alpha$

補題　$0<\beta\le\eta\le\alpha\le\varepsilon\wedge\tau\in Cond^{\alpha}_{\beta}\wedge p\in P_\beta\rightarrow p\cup\{\tau\restriction\eta\}\in P_\eta$

補題　$\beta<\varepsilon$ に対し、

$P_{\beta+1}=\{p\subseteq Cond^{\beta+1}\mid\phi\in p\wedge p$ は可算 $\wedge\ p\restriction\beta\in P_\beta\wedge p\restriction\beta\Vdash_\beta \text{“}\exists q\in\dot{Q}_\beta$ (q は $p\restriction\{\beta\}$ の下界)”$\}$

であり、さらに、$p_1, p_2\in P_{\beta+1}$ に対して、

$$p_1 \le p_2 \text{ in } P_{\beta+1} \quad \text{iff} \quad p_1 \restriction \beta \le p_2 \restriction \beta \text{ in } P_\beta$$
$$\wedge\, p_1 \restriction \beta \Vdash_\beta \text{“} \forall \xi \in \dot{Q}_\beta (\xi \text{ は } p_1(\{\beta\}) \text{ の下界} \to \xi \text{ は } p_2(\{\beta\}) \text{ の下界})\text{”}$$

補題　$\beta < \varepsilon$ のとき，$\{p \cup \{\langle 0, \langle \beta, \dot{\xi} \rangle\rangle\} \mid p \in P_\beta \wedge \dot{\xi} \in dom(\dot{Q}) \wedge p \Vdash_\beta \text{“}\dot{\xi} \in \dot{Q}\text{”}\}$ は $P_{\beta+1}$ の dense subset である．従って，$i : P_\beta * \dot{Q}_\beta \to P_{\beta+1}$ を

$$i(p, \dot{\xi}) = p \cup \{\langle 0, \langle \beta, \dot{\xi} \rangle\rangle\}$$

で定めれば，これは dense embedding である．

定義　$\alpha \le \varepsilon$　$p_1, p_2 \in P_\alpha$，$\tau_1, \tau_2 \in Cond^\alpha$ とする．

(1)　$p_1 \sim p_2$ in P_α　iff　$p_1 \le p_2 \le p_1$ in P_α

(2)　$\tau_1 \sim \tau_2$ in $Cond^\alpha$　iff　$\forall \eta < \alpha (1 \Vdash_\eta \text{“}\tau_1(\{\eta\}) = \tau_2(\{\eta\})\text{”})$

これらは同値関係である．

定義　$\alpha \le \varepsilon$，$x, y \subseteq P_\alpha$ とする．

$x \sim y$ in $\mathcal{P}(P_\alpha)$

iff　$\forall p \in x\, \exists p' \in y (p \sim p') \wedge \forall p' \in y\, \exists p \in x\, (p' \sim p)$

これも同値関係である．

次のことが容易にわかる．

補題 $\beta \le \alpha \le \varepsilon$, $\tau_1, \tau_2 \in Cond^{\alpha}$ とする．

$\tau_1 \sim \tau_2$ in $Cond^{\alpha}$ $\rightarrow$ $\tau_1 \upharpoonright \beta \sim \tau_2 \upharpoonright \beta$ in $Cond^{\beta}$

補題 $\alpha \le \varepsilon$. $p_1, p_2 \in P_{\alpha}$ とする． $\forall \tau_1 \in p_1 \exists \tau_2 \in p_2 (\tau_1 \sim \tau_2)$ ならば．$p_2 \le p_1$ である．故に．$\forall \tau_1 \in p_1 \exists \tau_2 \in p_2 (\tau_1 \sim \tau_2) \wedge \forall \tau_2 \in p_2 \exists \tau_1 \in p_1 (\tau_2 \sim \tau_1)$ ならば．$p_1 \sim p_2$ である．

補題．$0 < \zeta < \alpha \le \varepsilon$, $\tau, \sigma \in Cond^{\alpha}$, $\tau = \langle \zeta, f \rangle$, $\sigma = \langle \zeta, g \rangle$ とすると．

$dom(f) \sim dom(g) \wedge \forall p \in dom(f) \forall p' \in dom(g) (p \sim p' \rightarrow f(p) \sim g(p'))$ $\rightarrow$ $\tau \sim \sigma$

補題 $0 < \eta < \alpha$. $\tau \in Cond^{\alpha}_{\eta}$ とし．関数 f を．$dom(f) = \{\{\phi\}\}$, $f(\{\phi\}) \sim \tau$, $f(\{\phi\}) \in Cond^{\alpha}_{\eta}$ なるものとする． このとき．$\langle \eta, f \rangle \in Cond^{\alpha}_{\eta}$ であるが． $\tau \sim \langle \eta, f \rangle$ in $Cond^{\alpha}$ が成り立つ．

補題 $\alpha \le \varepsilon$. $p = \{\tau_n \mid n < \omega\} \in P_{\alpha}$ とし．各 $n < \omega$ に対し．$\sigma_n \in Cond^{\alpha}$ が $\tau_n \sim \sigma_n$ をみたしているものとすると．$p' = \{\phi\} \cup \{\sigma_n \mid n < \omega\} \in P_{\alpha}$.
$p \sim p'$ である．

ここで．Schwanz を定義する．

定義．$\delta \le \varepsilon$, $\alpha \le \varepsilon - \delta$ とする．$\langle |[\delta, \delta + \beta)| \mid \beta \le \alpha \rangle$. $\langle e^{\delta}_{\beta} \mid \beta \le \alpha \rangle$,

$\langle \dot{R}^\delta_\beta \mid \beta \le \alpha \rangle$, $\langle \dot{S}^\delta_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ が次の条件をみたすとき、これらを、RCS-iteration の（α までの）Schwanz という．

(1) $\restriction[\delta,\delta+\beta) : Cond^{\delta+\beta} \to V^{P_\delta}$ であり、$\tau \in Cond^{\delta+\beta}$ に対し、$\restriction[\delta,\delta+\beta)(\tau)$ を $\tau\restriction[\delta,\delta+\beta)$ と書くと．

(a) $\phi\restriction[\delta,\delta+\beta) = \check{\phi}$

(b) $\tau=\langle 0,\langle\zeta,\dot{\xi}\rangle\rangle$, $\zeta<\delta$, $\dot\xi\in dom(\dot Q_\zeta)$ のとき、

$$\tau\restriction[\delta,\delta+\beta)=\check\phi$$

(c) $\tau = \langle 0,\langle\delta+\zeta,\dot\xi\rangle\rangle$, $\zeta<\beta$, $\dot\xi\in dom(\dot Q_{\delta+\zeta})$ のとき、

$$\tau\restriction[\delta,\delta+\beta) = op(\check 0, op(\check\zeta, (e^\delta_\zeta(\dot\xi))_{P_\delta}))$$

(d) $\tau=\langle\zeta,f\rangle$, $0<\zeta<\delta+\beta$ で、$\zeta\le\delta$ のとき、

$$\tau\restriction[\delta,\delta+\beta) = \bigcup_{p\in dom(f)} \{\langle\sigma,r\rangle \in dom(f(p)\restriction[\delta,\delta+\beta))\times P_\delta \mid r\le p$$
$$\wedge\, r\Vdash_{\delta} \text{“}\sigma\in f(p)\restriction[\delta,\delta+\beta)\text{”}\}$$

(e) $\tau=\langle\delta+\zeta,f\rangle$, $0<\zeta<\beta$ のとき、

$$\tau\restriction[\delta,\delta+\beta)=op(\check\zeta,\dot t_f)$$

ここで、

$$\dot t_f = \{\langle op(p\restriction[\delta,\delta+\zeta), f(p)\restriction[\delta,\delta+\beta)), p\restriction\delta\rangle \mid p\in dom(f)\}$$

(2) $\dot R^\delta_\beta$ は P_δ-name for a p.o.

(3) $\{\langle p\restriction[\delta,\delta+\beta), p\restriction\delta\rangle \mid p\in P_{\delta+\beta}\} \subseteq \dot R^\delta_\beta$

ここで、$p\restriction[\delta,\delta+\beta) = \{\langle\tau\restriction[\delta,\delta+\beta), p\restriction\delta\rangle\mid \tau\in p\}$

(4) $e^\delta_\beta : P_{\delta+\beta}\to P_\delta * \dot R^\delta_\beta$, $e^\delta_\beta(p)=\langle p\restriction\delta, p\restriction[\delta,\delta+\beta)\rangle$ であり、かつ、

$$\forall p_1,p_2\in P_{\delta+\beta}\,(p_1\le p_2 \leftrightarrow e^\delta_\beta(p_1)\le e^\delta_\beta(p_2))$$

(5) $\forall r \in P_\delta \, \forall \mathring{x} \in V^{P_\delta} [(r \Vdash_\delta \text{“} \mathring{x} \in \mathring{R}^\delta_\beta)$

$\rightarrow \exists p \in P_{\delta+\beta} (p \restriction \delta = r \wedge r \Vdash_\delta \text{“} p \restriction [\delta, \delta+\beta) \sim \mathring{x} \text{ in } \mathring{R}^\delta_\beta \text{”})]$

(6) $\dot{S}^\delta_\beta = (e^\delta_\beta(\mathring{Q}_{\delta+\beta}))_{P_\delta}$

(7) $1 \Vdash_\delta$ “ $\langle \mathring{R}^\delta_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle, \langle \mathring{S}^\delta_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ は RCS-iteration ”

(1)-(5) は全ての $\beta \leq \alpha$ についての主張であり、(6) は全ての $\beta < \alpha$ についての主張である。また、

$$\langle \mathring{R}^\delta_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle = \{ op(\check{\beta}, \mathring{R}^\delta_\beta) \mid \beta \leq \alpha \} \in V^{P_\delta}$$

と考える。$\langle \mathring{S}^\delta_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ についても同様である。

注意. (1). 上の定義の (1)-(c) において、$e^\delta_\xi(\mathring{q})$ は $P_\delta * \mathring{R}^\delta_\xi$-name である。また、(d) においては、$P_\xi \lessdot P_\zeta$ なので、$dom(f)$ は P_δ の antichain である。

(2). 定義の (4), (5) により、e^δ_β は dense embedding である。

(3). e^δ_β, $\mathring{R}^\delta_\beta$, $\mathring{S}^\delta_\beta$ を単に、e_β, $\mathring{R}_\beta$, $\mathring{S}_\beta$ と書くこともある。

定理. $\delta \leq \varepsilon$ とする。$\alpha \leq \varepsilon - \delta$ に対し、α までの Schwanz

$$\langle \Pi[\delta, \delta+\beta) \mid \beta \leq \alpha \rangle, \langle e_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle, \langle \mathring{R}_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle, \langle \mathring{S}_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$$

が存在する。特に $\alpha = \varepsilon - \delta$ とすると、

$$e_{\varepsilon-\delta} : P_\varepsilon \xrightarrow[\text{dense}]{} P_\delta * \mathring{R}_{\varepsilon-\delta}$$

$1 \Vdash_\delta$ “ $\langle \mathring{R}_\beta \mid \beta \leq \varepsilon - \delta \rangle, \langle \mathring{S}_\beta \mid \beta < \varepsilon - \delta \rangle$ は RCS-iteration ”

証明は、$\alpha \leq \varepsilon - \delta$ についての帰納法による。

参考文献

S. Shelah, Iterated forcing and changing cofinalities, Israel J. of Math. 40 (1981) pp. 1-32.

〃 Proper Forcing. Lecture Notes in Mathematics, 940. Springer (1982) pp. 304-353